

Transformação de Lorentz p/ velocidades

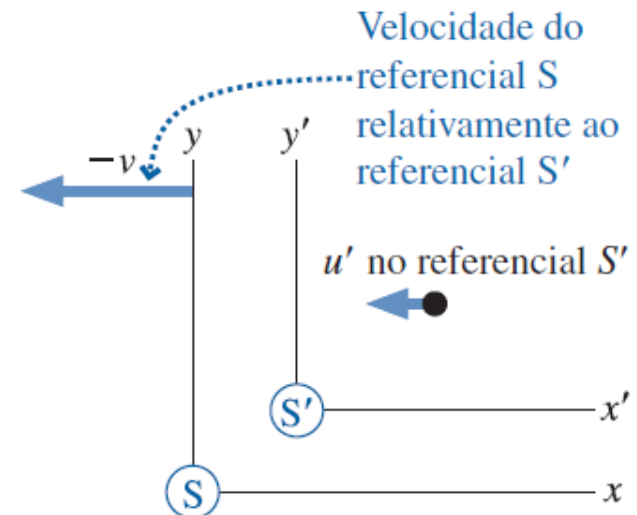
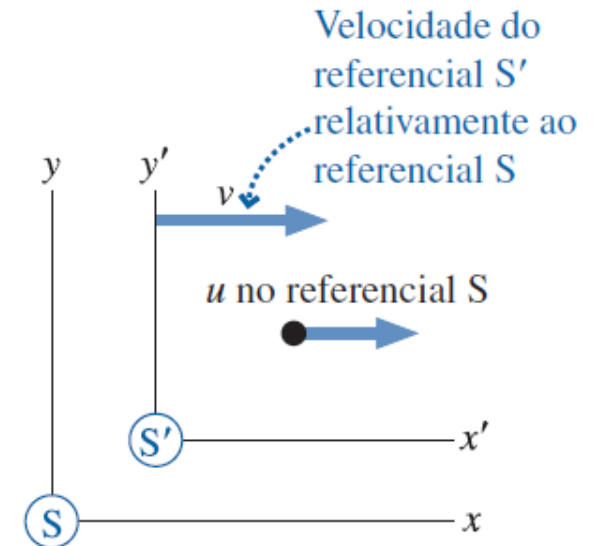
$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\gamma(x' + vt'))}{d(\gamma(t' + vx'/c^2))}$$

$$= \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2}$$

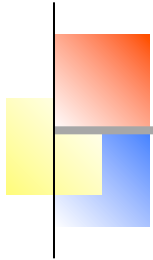
$$= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Reciprocamente:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$



Transformação de Lorentz p/ velocidades

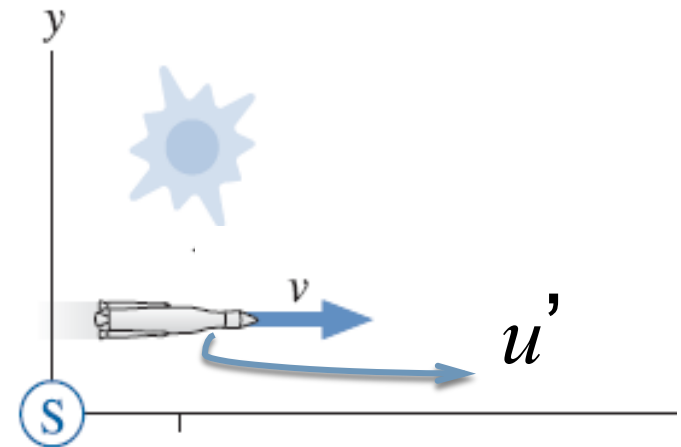


$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Teste: se $u' = c$: **$u = c$ ✓** (p/qq v)

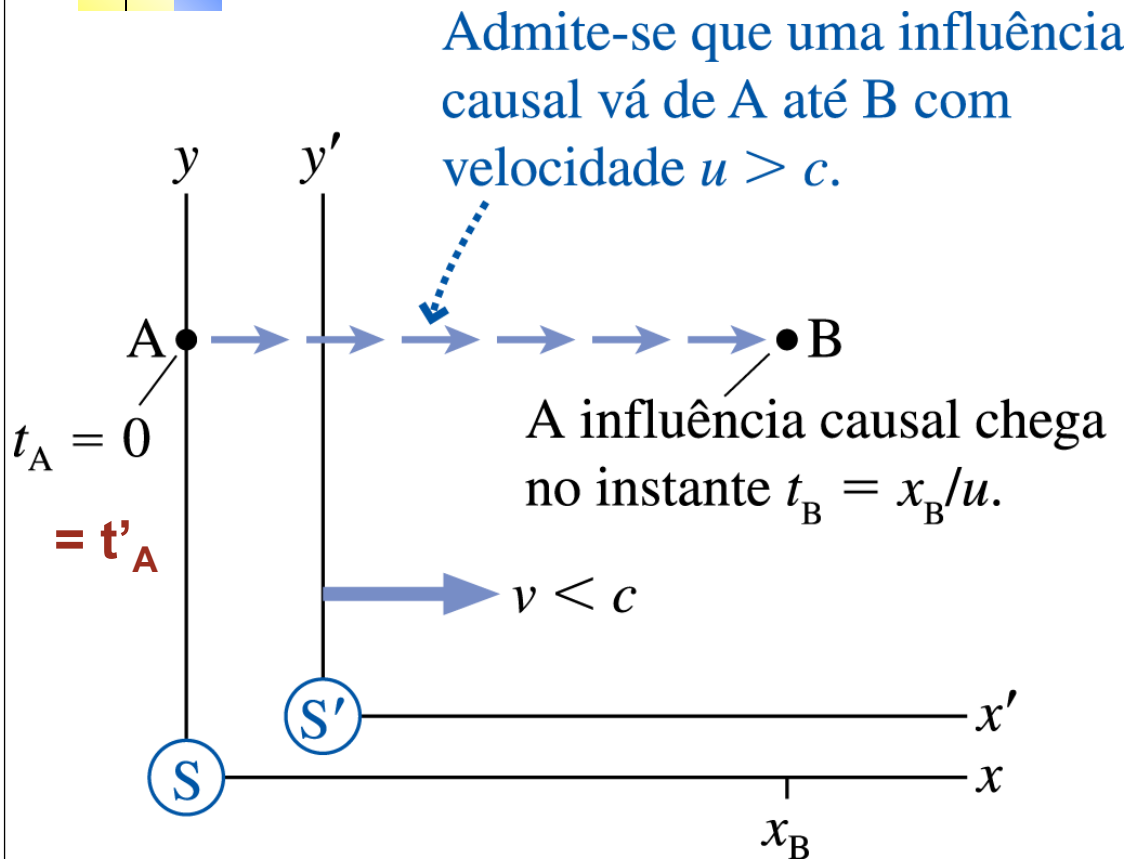
Alice está em um foguete andando com velocidade $v = 0,5c$ com respeito a Victor. Ela dispara um míssil na direção oposta à de Victor, com velocidade $u' = 0,6c$ em relação ao foguete. Qual a velocidade do projétil em relação a Victor?

Resposta: $u = 0,846c$



Desafio: prove que se $u' \leq c$ e $v \leq c$ então $u \leq c$

Pode algo andar mais rápido que a luz?



**P: Se $v > (c/u).c$,
então o instante
 t'_B (com relação
ao ref. S') satisfaz**

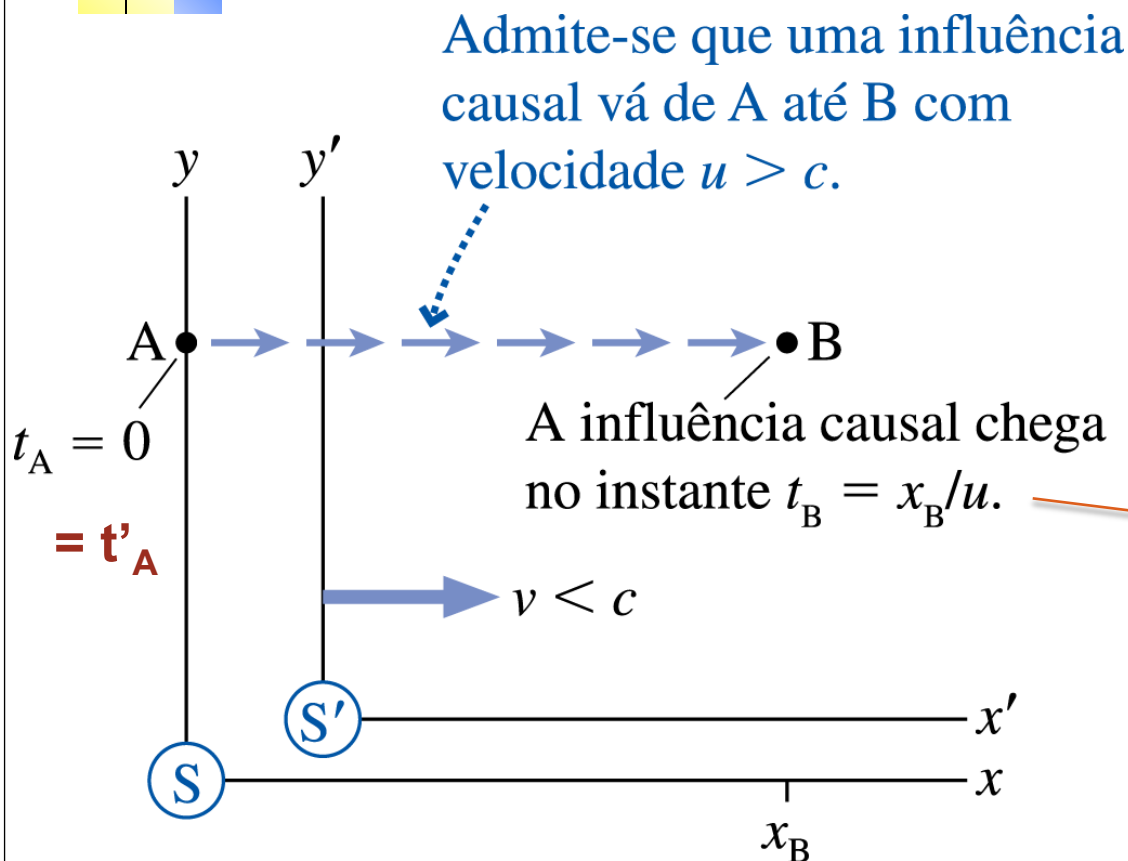
A) $t'_B > t_B$

B) $t'_B = t_B$

C) $t_B > t'_B > 0$

D) $t_B > 0 > t'_B$

Pode algo andar mais rápido que a luz?



Visto do ref. S' :

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) = 0$$

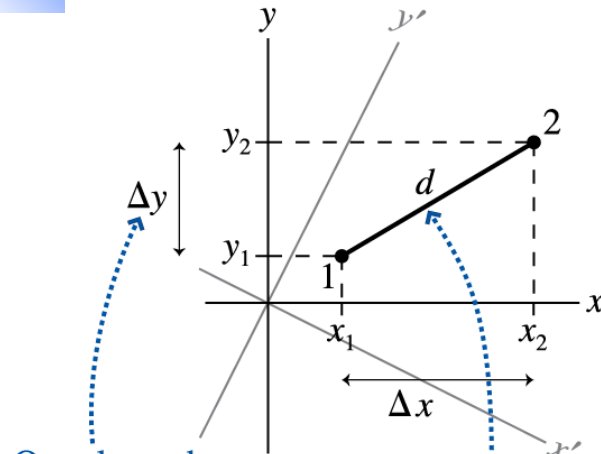
$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right) = \gamma t_B \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right)$$

Se $v > (c/u).c$: $t'_B < 0!!$

Se algo pudesse andar mais rápido que a luz, alguns observadores veriam **efeitos acontecerem antes das suas causas**, como num filme rodando ao contrário – absurdo!

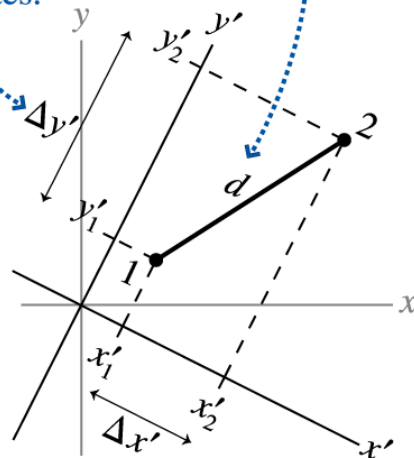
O Intervalo entre 2 eventos

Medições feitas no sistema xy



Os valores das coordenadas e dos intervalos são diferentes.

A distância d é a mesma.



Medições feitas no sistema $x'y'$

Na geometria usual, a **distância espacial** entre 2 pontos não depende da escolha da orientação dos eixos x e y

$$\begin{aligned}d^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2\end{aligned}$$



O Intervalo entre 2 eventos

Em relatividade: o *intervalo espaço-temporal* entre dois eventos:

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

é independente do referencial inercial usado para medir x e t

2 eventos

$$E1: (x_1, t_1) \text{ ou } (x'_1, t'_1) \quad = \gamma^2 [c^2(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)^2 - (\Delta x' + v\Delta t')^2]$$

$$E2: (x_2, t_2) \text{ ou } (x'_2, t'_2) \quad = \cancel{\gamma^2} [c^2(\Delta t')^2(1 - \cancel{v^2/c^2}) + (\Delta x')^2(\cancel{v^2/c^2} - 1) + \cancel{2v\Delta x'\Delta t'} - \cancel{2v\Delta x'\Delta t'}]$$

$$\Delta x = (x_2 - x_1); \quad \Delta t = (t_2 - t_1)$$

$$= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$



O Intervalo entre 2 eventos

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Considere os seguintes pares de eventos:

- A) A1: Victor dispara um raio laser; A2: O raio atinge Ana
- B) B1: o relógio de Peggy marca 13h; B2: o relógio de Peggy marca 14h
- C) C1: Uma bomba explode 100m à esquerda de Ryan;
C2: Simultaneamente (no ref. de Ryan) outra bomba explode 100m à sua direita

P: Esses pares de eventos satisfazem

A) $s^2_A > 0$, $s^2_B = 0$, $s^2_C < 0$

C) $s^2_A = 0$, $s^2_B < 0$, $s^2_C > 0$

B) $s^2_A = 0$, $s^2_B > 0$, $s^2_C < 0$

D) $s^2_A < 0$, $s^2_B > 0$, $s^2_C = 0$



O Intervalo entre 2 eventos

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

O intervalo entre 2 eventos pode ser de 3 tipos distintos

1. $s^2 > 0$: intervalo 'tipo tempo'.

Ex: intervalo entre dois 'tiques' de um mesmo relógio.

Nesse caso é possível que um dos eventos afete o outro, através de alguma influência que se propague com $v = \Delta x / \Delta t < c$. Todos os observadores inerciais concordam quanto à ordem temporal desses eventos.

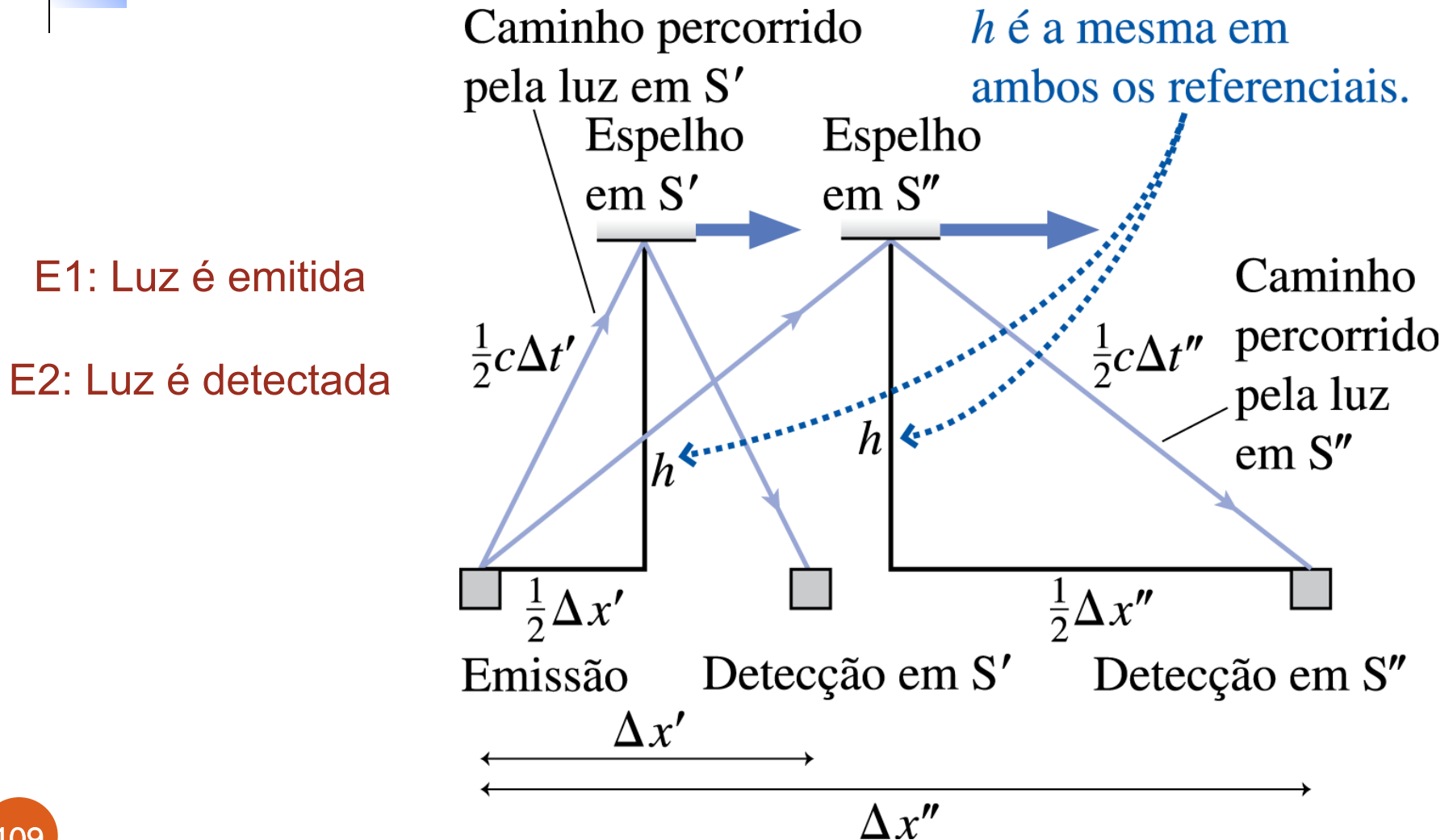
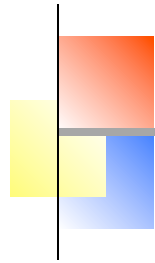
2. $s^2 = 0$: intervalo 'nulo' ou 'tipo luz'.

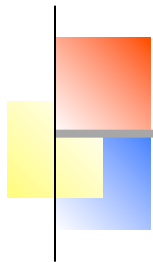
Ex: intervalo entre a emissão e detecção de um raio de luz se propagando em linha reta. Nesse caso é possível que um dos eventos afete o outro, mas apenas através de uma influência que se propaga com $v = \Delta x / \Delta t = c$. Todos os observadores inerciais concordam quanto à ordem temporal desses eventos.

3. $s^2 < 0$: intervalo 'tipo espaço'.

Ex: intervalo entre duas bombas explodindo simultaneamente em um dado referencial. Nesse caso não é possível que um dos eventos afete o outro, por qualquer influência que se propague com $v = \Delta x / \Delta t \leq c$. Observadores inerciais distintos podem discordar quanto à ordem temporal desses eventos.

Interpretação Geométrica do Intervalo entre 2 eventos



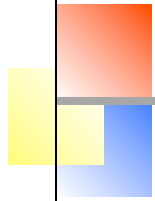


O Intervalo entre 2 eventos

Obs1: mais geralmente: $s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

Obs2: Como 'usar' o intervalo espaço-temporal:

Se sabemos Δx e Δt entre 2 eventos no ref. S, e também (p. ex.) $\Delta t'$ no ref. S', podemos facilmente obter $|\Delta x'|$, sem ter de usar todo o 'poderio' das transformações de Lorentz...



Energia e Momento linear Newtonianos

Relembrando: Na mecânica de Newton existem
Leis de conservação:

Conservação do Momento Linear: num sistema isolado de forças externas,

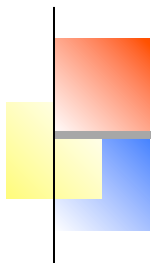
$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$$

onde o vetor $\mathbf{P} = \sum_j m_j \mathbf{u}_j$ é o **momento linear total** das partículas do sistema

Conservação da Energia: num sistema submetido a forças conservativas

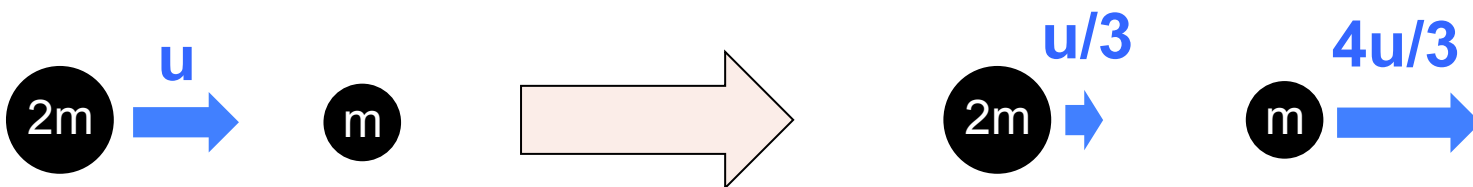
$$E_i = E_f$$

onde $E = \sum_j \frac{1}{2} m_j u_j^2 + V(x_1, \dots, x_n, t)$ é a **energia total** das partículas do sistema
energia cinética energia potencial



Energia e Momento linear Newtonianos

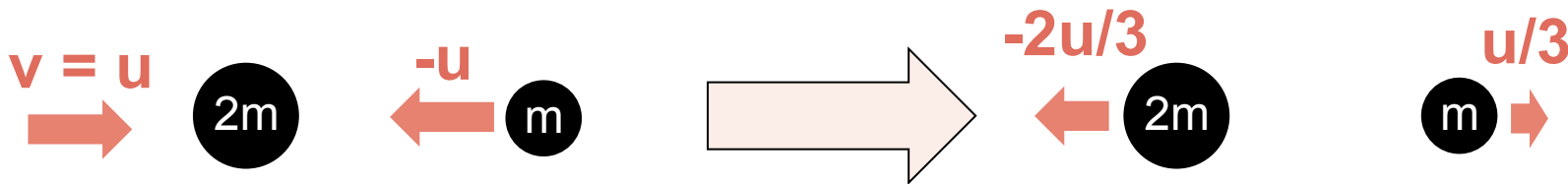
As leis de conservação de P, E Newtonianos são invariantes por transformações de Galileu? **SIM**



$$P_i = 2mu, \quad E_i = mu^2$$

$$P_f = 2mu, \quad E_f = mu^2$$

$$\text{Galileu: } u' = u - v$$



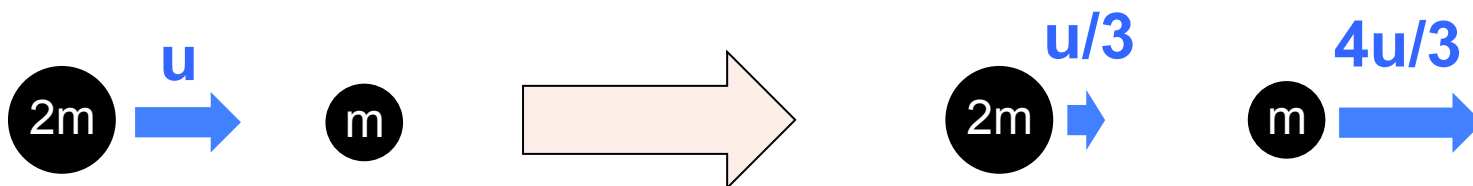
$$P_i = -mu, \quad E_i = \frac{1}{2}mu^2$$

$$P_f = -mu, \quad E_f = \frac{1}{2}mu^2$$

Cada observador inercial mede um valor diferente de P, E para o sistema, mas ambos concordam que eles se conservam

Energia e Momento linear Newtonianos

As leis de conservação de P, E Newtonianos são invariantes por transformações de **Lorentz**? **NÃO!!**



$$P_i = 2mu, \quad E_i = mu^2$$

$$P_f = 2mu, \quad E_f = mu^2$$

$$\text{Lorentz: } u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$



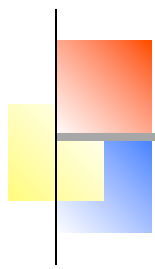
$$v = u$$



$$P_i = -mu, \quad E_i = \frac{1}{2}mu^2$$

$$\frac{-2u/3}{(1 - u^2/3c^2)} \quad \frac{u/3}{(1 - 4u^2/3c^2)}$$

$$P_f \neq -mu !!, \quad E_f \neq \frac{1}{2}mu^2 !!$$



Energia e Momento linear Newtonianos

As leis de conservação de P , E Newtonianos são invariantes por transformações de **Lorentz**? **NÃO!!**

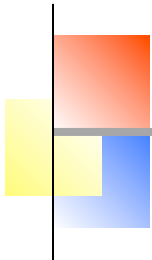
Moral: mesmo que P , E Newtonianos sejam conservados em um ref. inercial, em geral **NÃO** serão conservados em outros refs. inerciais!

2 opções possíveis

a) **Desistir de usar leis de conservação para momento e energia**



b) **Procurar novas expressões relativísticas para o momento e energia, que sejam conservadas em todos os referenciais inerciais**



Momento linear relativístico

Solução (demonstração nas notas p/ próx. aula):

- a) Tomar a derivada temporal em relação ao **tempo próprio τ da partícula**
- b) Tomar a massa **m no referencial de repouso da partícula**

$$P_{Relativistico} = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p P_{Newtoniano}$$

$$\text{onde } \gamma_p = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Obs 1: $\gamma_p \neq \gamma$! (u é a velocidade **da partícula**, não do referencial S')

Obs 2: quando $u \ll c$, $P_{Relativistico} \longrightarrow P_{Newtoniano}$

Momento linear relativístico

$$P_{relat} = \gamma_p m u$$



A partícula A tem metade da massa mas o dobro da velocidade da partícula B. Os momentos lineares relativísticos das duas partículas satisfazem:

- a) $p_A > p_B$
- b) $p_A = p_B$
- c) $p_A < p_B$
- d) depende de u

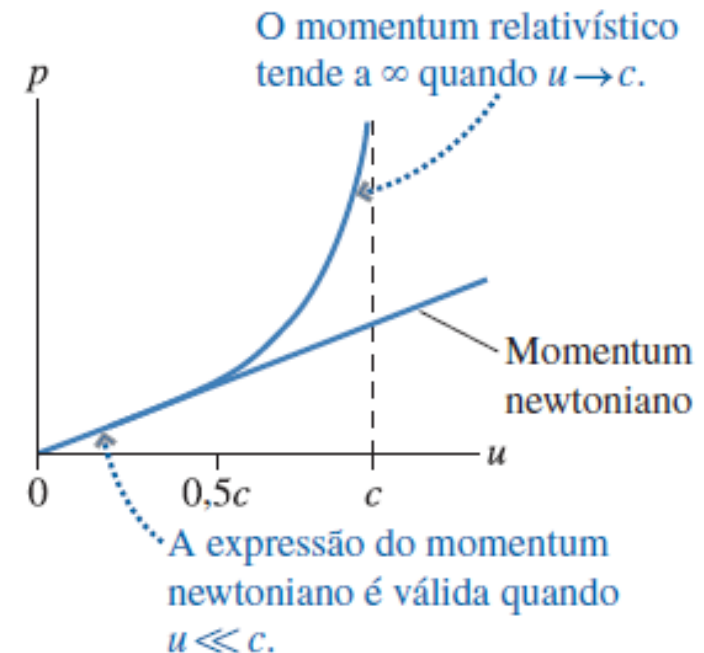
γ_p é maior para a partícula mais rápida!

Momento linear relativístico vs clássico


$$P_{relat} = \gamma_p m u$$

Um elétron tem massa $m \approx 9 \cdot 10^{-31} \text{kg}$. A tabela abaixo compara os momentos clássico (Newtoniano) e Relativístico para um elétron em várias velocidades (unidade: $10^{-22} \text{kg} \cdot \text{m/s}$):

u	$p = m \cdot u$ clássico	$p = \gamma_p m \cdot u$ relativístico	diferença [%]
0.1c	0.273	0.276	1.1
0.5c	1.36	1.57	15.4
0.9c	2.46	5.63	128.9
0.99c	2.7	19.2	611.1



Partícula submetida a força constante

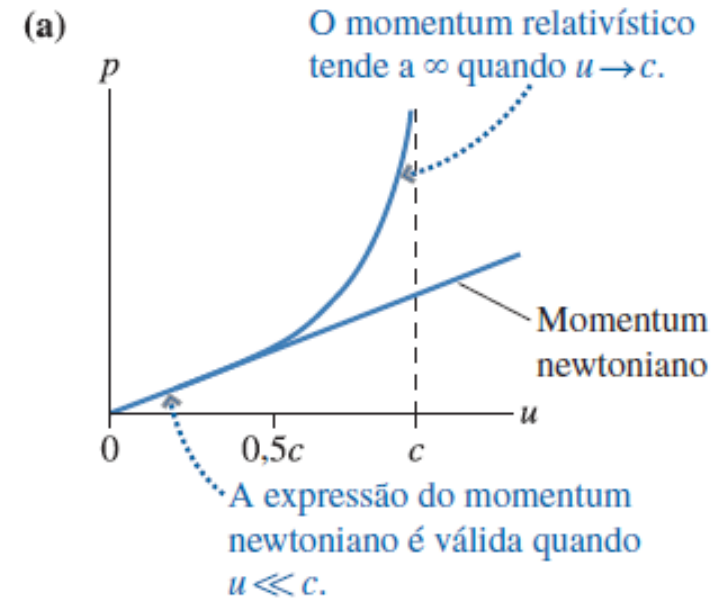
$$P_{Newtoniano} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{Relativistico} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$

Def: **Força (relativística):** $\mathbf{F} = d\mathbf{P}_{relat} / dt$

P: Como se comporta, em função do tempo t , a aceleração $a = du/dt$ de uma partícula que sofre uma força F **constante**?

- a) É constante, pois $F = ma$.
- b) Cai com t , tendendo a zero.
- c) Aumenta com t , tendendo a infinito.
- d) Primeiro aumenta e depois cai com t .



Partícula submetida a força constante

$$P_{\text{Newtoniano}} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{\text{Relativístico}} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$

Def: **Força (relativística):** $\mathbf{F} = d\mathbf{P}_{\text{relat}} / dt$

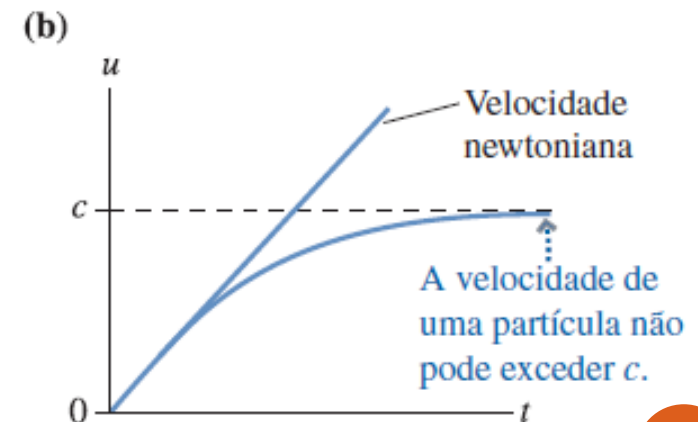
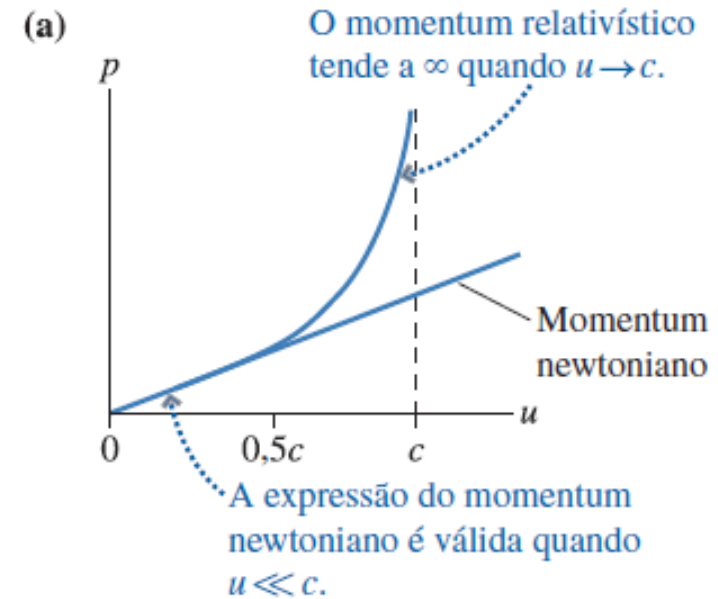
P: Como se comporta, em função do tempo t , a aceleração $a = du/dt$ de uma partícula que sofre uma força F **constante**?

a) É constante, pois $F = ma$.

b) **Cai com t , tendendo a zero.** $F \neq ma!$

c) Aumenta com t , tendendo a infinito.

d) Primeiro aumenta e depois cai com t .



Partícula submetida a força constante

Dedução: considere uma partícula de massa m , inicialmente parada em $x = 0, t = 0$, a qual sofre uma força (relativística) F constante

$$F \equiv \frac{d}{dt}(\gamma_p m u) \text{ , portanto:}$$

$$F \cdot dt = d(\gamma_p m u)$$

Integrando cada lado:
(Lembre-se, F é constante!)

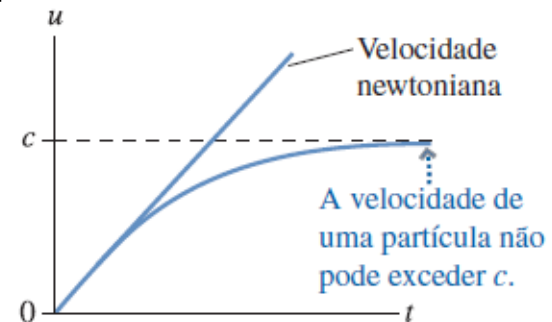
$$Ft = \gamma_p m u = p$$

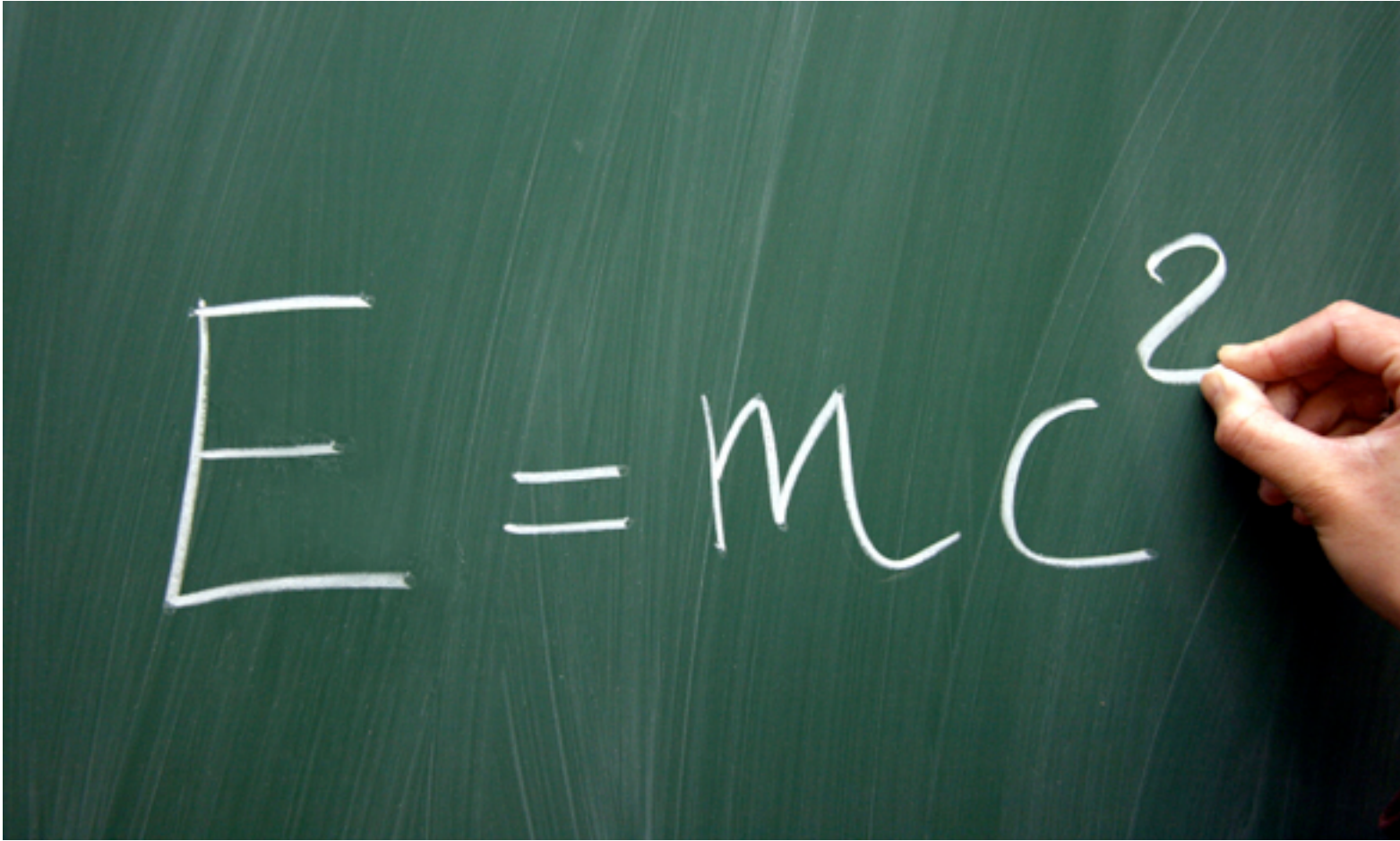
Dividindo por γ_p e elevando ao quadrado:

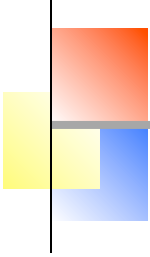
$$m^2 u^2 = \frac{F^2 t^2}{\gamma_p^2} = F^2 t^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

Juntando termos em u^2 e resolvendo para u :

$$u(t) = \frac{Fct}{\sqrt{(Ft)^2 + (mc)^2}}$$



A close-up photograph of a hand writing the equation $E = mc^2$ on a dark green chalkboard. The hand is on the right side of the frame, with the index finger and thumb visible, holding a piece of white chalk and just finishing the superscript '2' on the 'c'. The letters 'E', '=', 'm', and 'c' are already written in white chalk. The chalkboard has a slightly textured surface with some faint vertical lines.
$$E = mc^2$$



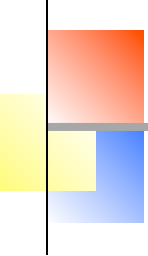
Energia relativística

Como fizemos com o momento linear, queremos uma nova definição **relativística** para a energia E , que satisfaça duas condições:

1. Para velocidades baixas ($v \ll c$), a nova definição de E deve concordar com a definição clássica (*)

(*) possivelmente a menos de uma constante, já que na física clássica sempre podemos escolher o 'zero' de energia de forma arbitrária.

2. A energia total ($\sum E$) de um sistema isolado deve ser conservada em todos os referenciais inerciais



Energia cinética relativística

Definição (recordando Fís I): o **trabalho** W realizado por uma força $\mathbf{F}$ para mover uma partícula do ponto 1 para o 2 ao longo de um caminho $\mathbf{s}$ é:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = K_2 - K_1$$

onde $K_{1,2}$ são as energias cinéticas das partículas nos pontos 1 e 2, respectivamente (obs: verdade para sistema sem atrito).

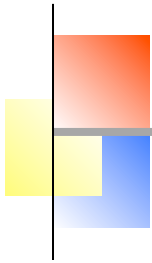
Using a definição relativística: $\vec{F} \equiv \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{u})$,

Algebra...
(v. notas
de aula)

chega-se à expressão:

$$K = \gamma_p mc^2 - mc^2 = (\gamma_p - 1)mc^2$$

Energia cinética relativística para uma partícula



Energia cinética relativística

$$K = \gamma_p mc^2 - mc^2 = (\gamma_p - 1)mc^2$$

Checando: para $u \ll c$, podemos aproximar γ_p usando a expansão

$$\gamma_p \approx 1 + \frac{1}{2} u^2/c^2$$

$$\rightarrow K \approx (1 + \frac{1}{2} u^2/c^2 - 1) mc^2 = \frac{1}{2} mu^2$$

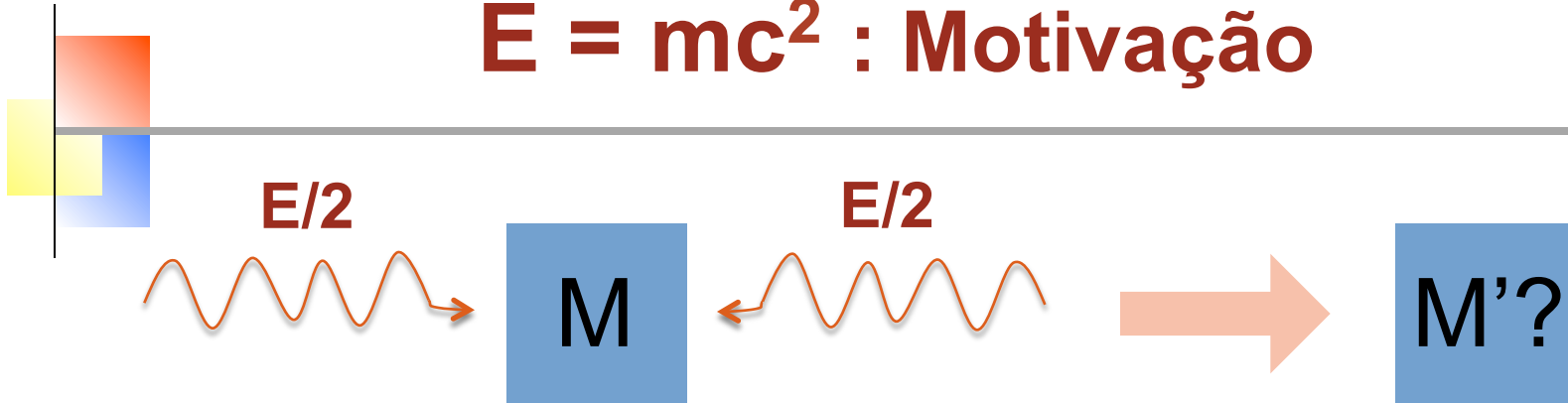
Portanto, para baixas velocidades recuperamos a expressão Newtoniana !



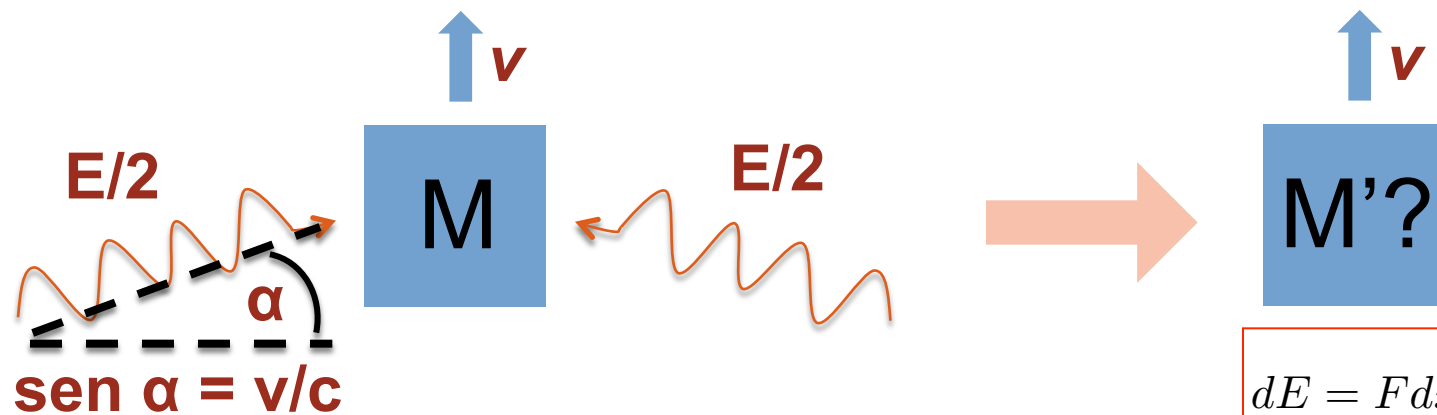
Porém.... essa expressão sozinha não se conserva em todos os referenciais inerciais.... (v. adiante)



$E = mc^2$: Motivação



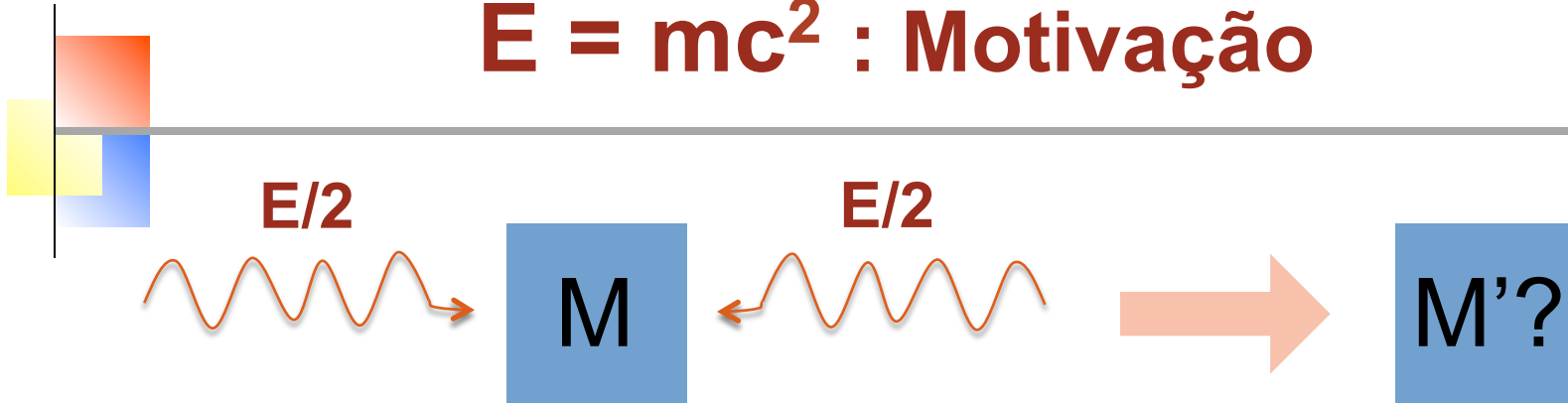
Em um referencial se movendo para baixo com velocidade $v \ll c$



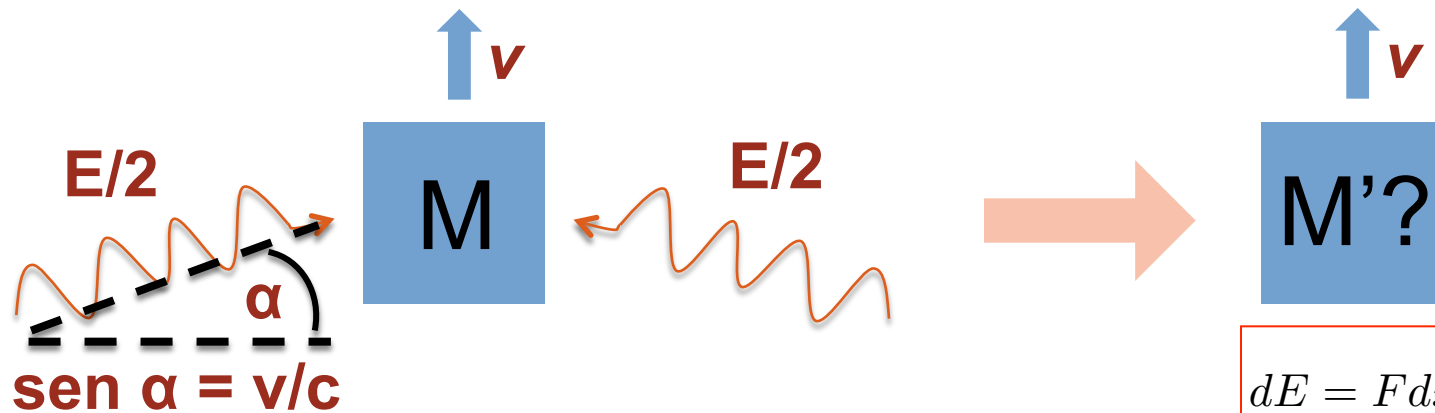
Cons. momento na dir. y : $M'v = Mv + 2 \text{ (mom. } y \text{ da luz)!}$

$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$

$E = mc^2$: Motivação



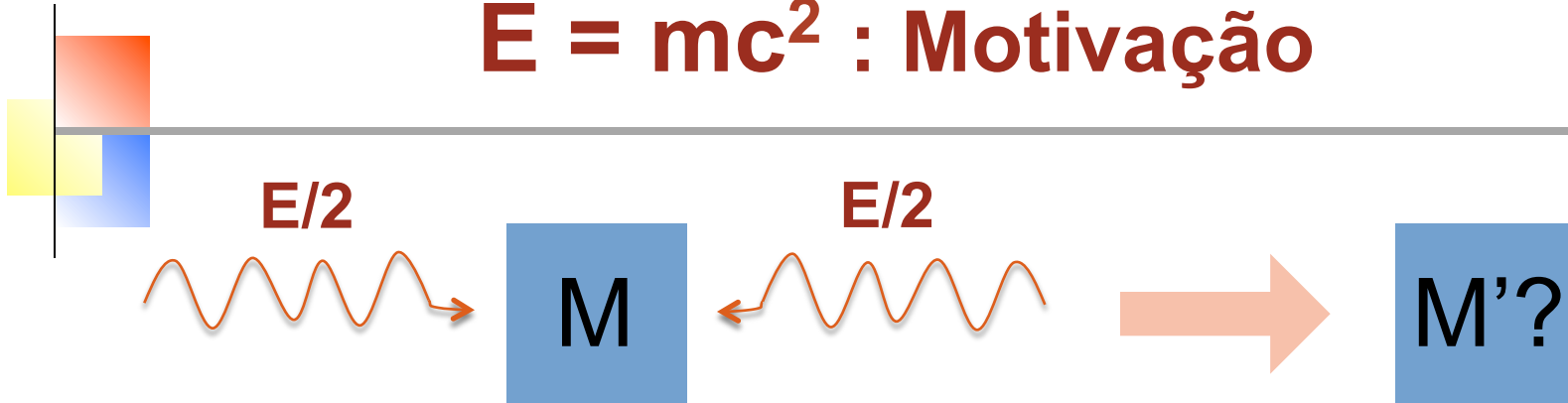
Em um referencial se movendo para baixo com velocidade $v \ll c$



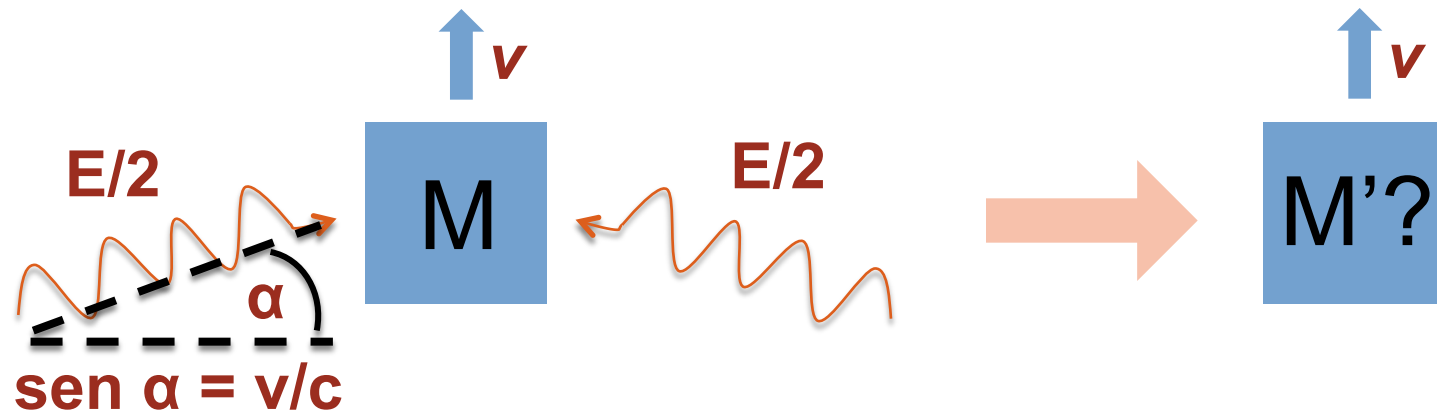
Cons. momento na dir. y : $M'v = Mv + 2 \left[(E/2c) \text{sen } \alpha \right]$

$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$

$E = mc^2$: Motivação

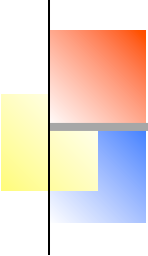


Em um referencial se movendo para baixo com velocidade $v \ll c$



Cons. momento na dir. y : $M'v = Mv + E v / c^2$

$$E = (M' - M)c^2 !$$



Energia relativística

Idéia revolucionária: e se **qualquer massa m** puder ser **convertida em energia**, a uma taxa **$E_0 = mc^2$** ?

Chamamos esse valor de **energia de repouso** do corpo

Nesse caso, a **energia relativística total** de um corpo (incluindo as energias cinética e de repouso) fica:

$$E_{Relativística} = K + mc^2 = \gamma_p mc^2$$

Obs: Limite clássico: para $u \ll c$, obtemos

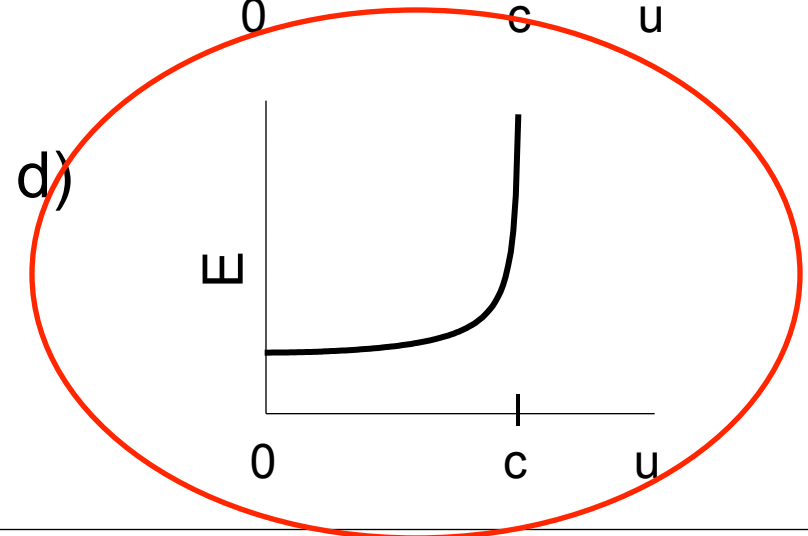
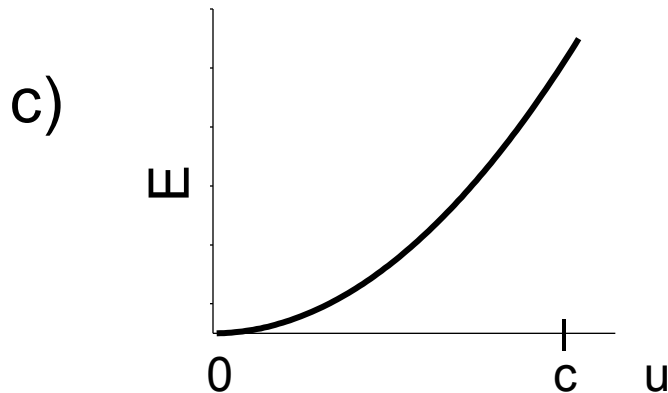
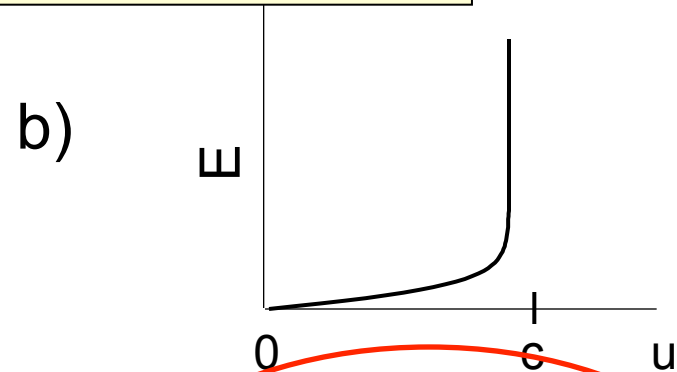
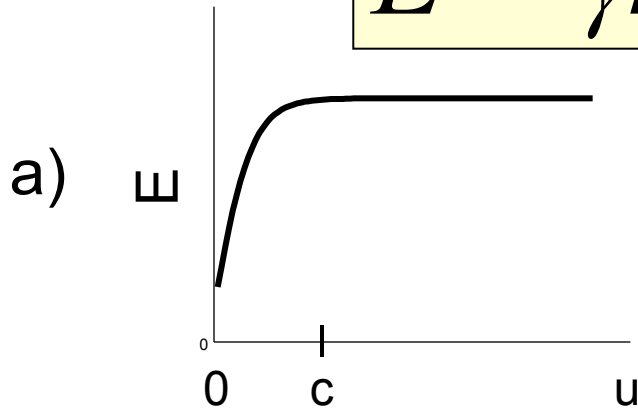
$$E_{Relativístico} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) = mc^2 + E_{Newtoniano}$$

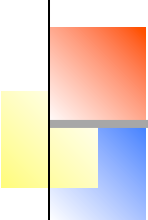
Outro modo de entender esse limite: vale quando $K \ll E_0$

Energia relativística

Qual gráfico representa a energia relativística total de uma partícula de massa m , em função da sua velocidade u ?

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2$$





Energia de repouso

P: Se você pudesse converter completamente 1kg de massa em energia, obteria uma quantidade semelhante à energia

a) obtida queimando 1 Tonelada de petróleo ($\sim 4 \times 10^{10}$ J)

b) liberada na explosão da bomba atômica de Hiroshima
($\sim 9 \times 10^{13}$ J)

c) consumida no ano de 2013 no Estado do RJ ($1,4 \times 10^{17}$ J)

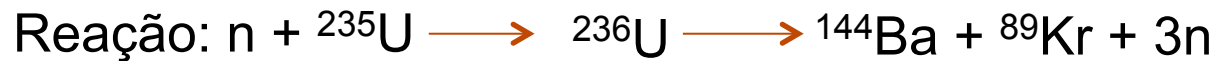
d) emitida pelo Sol em $1 \mu\text{s}$ ($3,8 \times 10^{20}$ J)

$$E_0 = mc^2 = (1 \text{ kg}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

obs: até onde se sabe, o único processo físico onde essa conversão completa ocorre é a **aniquilação matéria-antimatéria**

Energia de repouso

Aplicação: Fissão Nuclear do ^{235}U



A massa dos produtos somados é menor do que a massa dos reagentes!

$$\Delta M = M_{\text{antes}} - M_{\text{depois}} = 3.07 \times 10^{-28} \text{ Kg.}$$

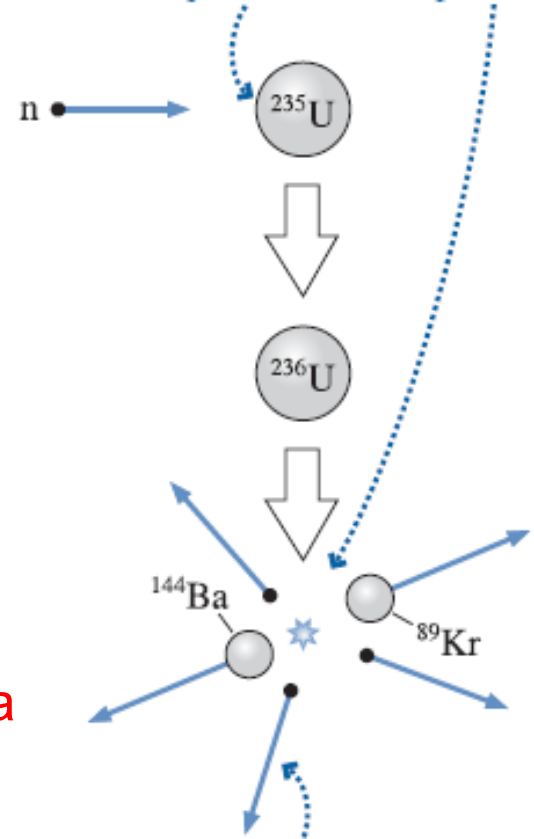
obs: $1 \text{ u} = 1/12$ (Massa do ^{12}C) = $1,66 \times 10^{-27} \text{ Kg.}$

Massa 'faltante': convertida em ENERGIA

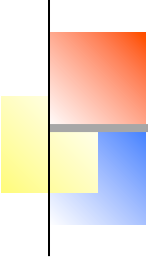
$$E_0 = (\Delta M)c^2 = 2.8 \times 10^{-11} \text{ J liberados em cada reação}$$

Com 1 mol ($N_A = 6.02 \times 10^{23}$ átomos) obtém-se uma energia gigantesca!!

A massa dos reagentes é 0,185 u maior do que a massa dos produtos.



A massa de 0,185 u foi convertida em energia.



Energia e Momento linear relativísticos

$$P_{relat} = \gamma_p m u ; \quad E_{relat} = \gamma_p m c^2$$

Relação útil ligando momento e energia para 1 partícula
(generaliza a expressão Newtoniana $K = P^2 / 2m$)

$$E_{relat} = \sqrt{m^2 c^4 + P_{relat}^2 c^2}$$

Vale em qualquer referencial inercial

$$\begin{aligned} \text{Prova: } E_{relat}^2 &= \gamma_p^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 \left(\frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) = m^2 c^4 \left(1 + \frac{u^2}{c^2 - u^2} \right) \\ &= m^2 c^4 + \frac{m^2 u^2 c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m^2 c^4 + P_{relat}^2 c^2 \end{aligned}$$

Energia e Momento linear relativísticos

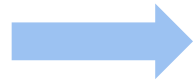
$$P_{relat} = \gamma_p m u ; \quad E_{relat} = \gamma_p m c^2$$

P: como essas quantidades se transformam quando realizamos uma transformação de Lorentz?

Considere 1 partícula se movendo de (x, t) para $(x + dx, t + dt)$ em um ref. S. Vamos transformar as expressões P_{relat} e E_{relat} acima para um ref. S' se movendo com vel. v com relação a S:

$$\frac{m}{d\tau} dx' = \frac{m}{d\tau} \gamma_p (dx - v dt)$$

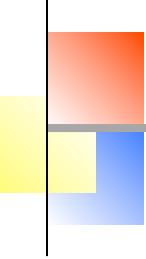
$$\frac{mc^2}{d\tau} dt' = \frac{mc^2}{d\tau} \gamma_p (dt - v dx/c^2)$$



$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - v E_{relat} / c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - v P_{relat})$$

Transformações de Lorentz para
momento e energia Relativísticos



Energia e Momento linear relativísticos

$$P_{relat} = \gamma_p m u ; \quad E_{relat} = \gamma_p m c^2$$

P: como essas quantidades se transformam quando realizamos uma transformação de Lorentz?

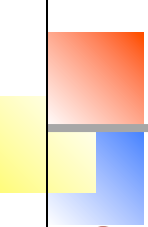
Considere 1 partícula se movendo de (x, t) para $(x + dx, t + dt)$ em um ref. S . Vamos transformar as expressões P_{relat} e E_{relat} acima para um ref. S' se movendo com vel. v com relação a S :

Obs: Para um sistema de n partículas, somando essas transformações sobre todas as partículas, vemos que elas valem também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - v E_{relat} / c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - v P_{relat})$$

Transformações de Lorentz para
momento e energia Relativísticos



Energia e Momento linear relativísticos

Consequencia: se, num dado referencial S observarmos que um sistema satisfaz

$$P^i_{relat} = P^f_{relat} \quad \text{e} \quad E^i_{relat} = E^f_{relat}$$

então um observador no ref. S' também observará que

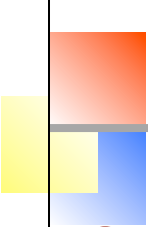
$$P'^i_{relat} = P'^f_{relat} \quad \text{e} \quad E'^i_{relat} = E'^f_{relat}$$

Obs: Para um sistema de n partículas, somando essas transformações sobre todas as partículas, vemos que elas valem também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz para
momento e energia Relativísticos



Energia e Momento linear relativísticos

Consequencia: se, num dado referencial S observarmos que um sistema satisfaz

$$P^i_{relat} = P^f_{relat} \quad \text{e} \quad E^i_{relat} = E^f_{relat}$$

então um observador no ref. S' também observará que

$$P'^i_{relat} = P'^f_{relat} \quad \text{e} \quad E'^i_{relat} = E'^f_{relat}$$

Com essas definições de P e E , a conservação de momento e energia torna-se uma propriedade física que **independe da escolha do referencial inercial**, obedecendo assim ao Princípio da Relatividade